Aula 06

HOMOMORFISMOS DE GRUPOS

META

Apresentar o conceito de homomorfismo de grupos

OBJETIVOS

Reconhecer e classificar os homomorfismos.

Aplicar as propriedades imediatas dos homomorfismos de grupos.

Calcular os núcleo e imagem de um homomorfismo.

Aplicar os teoremas dos homomorfismos na relação de problemas.

PRÉ-REQUISITOS

Todas as aulas anteriores principalmente as aulas 4 e 5.

INTRODUÇÃO

Caminhando dentro da teoria dos grupos, vamos a mais uma aula. Mais uma vez, necessitamos que você, caro aluno, tenha aprendido os conteúdos das aulas anteriores, principalmente, os das aulas 4 e 5 que tratam dos grupos.

Em estruturas algébricas os homomorfismos são aplicações que têm como domínio e contradomínio estruturas algébricas de mesma natureza (mesma definição abstrata) e servem em geral para comparar tais estruturas. No nosso caso, é claro, trataremos dos homomorfismos de grupos.

O CONCEITO DE HOMOMORFISMO

Definição 1. Sejam G e G' grupos e ψ uma aplicação de G em G'. Dizemos que ψ é um homomorfismo se $\psi(a.b) = \psi(a).\psi(b)$.

Exemplo 1. Se G é um grupo e $H \trianglelefteq G$, para $G' = {}^{G}/_{H}$, a aplicação $\psi = G \longrightarrow {}^{G}/_{H}$ definida por $\psi(a) = Ha$ é um homomorfismo de grupos, pois $\psi(ab) = Hab = Ha.Hb = \psi(a).\psi(b)$, $\forall a, b \in G$. Este homomorfismo é comumente chamado projeção canônica.

Exemplo 2. Dado um grupo G, a função identidade de G é evidentemente um homomorfismo de G em G'. Notemos que $I_G(ab) = ab = I_G(a).I_G(b),\ \forall a, b \in G$.

A um homomorfismo de um grupo G nele próprio, chamamos endomorfismo de G.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G'$ injetivo, chamamos um monomorfismo de G em G'.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G'$ sobrejetivo,chamamos um epimorfismo de G em G'.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G'$ bijetivo, chamamos um isomorfismo de G em G'. Neste caso dizemos também que G e G' são grupos isomorfos.

A um isomorfismo de um grupo G nele próprio, chamamos um automorfismo de G.

Proposição 1. Seja $\psi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Então, $\psi(e) = e'$, onde e e e' são, respectivamente, as identidades de G e G'.

Demonstração: $\psi(e).\psi(e.e) = \psi(e).\psi(e) \Rightarrow \psi(e).\psi(e)^{-1} = \big(\psi(e).\psi(e)\big)\,\psi(e) \Rightarrow e' = \psi(e).(\psi(e).\psi(e)^{-1} \Rightarrow \psi(e).e' = e' \Rightarrow \psi(e) = e'$.

Proposição 2. Seja $\psi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Então, $\forall a \in G, \psi(a)^{-1} = \psi(a)^{-1}$.

Demonstração $e' = \psi(e) = \psi(a.a^{-1}) = \psi(a).\psi(a^{-1}) \Rightarrow \psi(a^{-1}) = \psi(a)^{-1}$.

Proposição 3. Se $\psi : G \longrightarrow G$ é um homomorfismo e $H \leq G$ então $\psi(H)$ é um subgrupo de G?

Demonstração: $e \in H$ e $\psi(e) = e' \Longrightarrow e' \in \psi(H) \neq \phi$. Sejam $a', b' \in \psi(H)$. Existem $a, b \in H$ tais que $\psi(a) = a'$ e $\psi(b) = b'$. Logo, $a'.b'^{-1} = \psi(a).\psi(b)^{-1} = \psi(a).\psi(b^{-1}) = \psi(ab^{-1})$ e, como $ab^{-1} \in H$segue que $a'.b' \in \psi(H)$. Portanto, $\psi(H) \leq G'$. Neste caso $Im\,\psi = \psi(G) \leq G'$.

Proposição 4. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ e $\varphi : G' \longrightarrow G''$ são homomorfismos então $\varphi \circ \psi : G \longrightarrow G''$ também é homomorfismo.

Demonstração:

Dados $a, b \in G$, $(\varphi \circ \psi)(ab) = \varphi(\psi(ab)) = \varphi(\psi(a).\psi(b)) = \varphi(\psi(a)).\varphi(\psi(b)) = (\varphi \circ \psi)(a).(\varphi \circ \psi)(b)$.

Definição 2. Seja $\psi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismos chamamos núcleo de ψ e denotamos por $ker\,\psi (ou\; N(\psi)$ o subconjunto de G:

$$ker\,\psi = \{x \in G;\; \psi(x) = e'\}.$$

Exemplo 3. Dados um grupo G e $H \trianglelefteq G$, notemos que H é o núcleo da projeção canônica $\psi = G \longrightarrow {}^{G}/_{H}$, $\psi(a) = Ha$, pois, $Hx = H \Leftrightarrow x \in H$, ou seja, $ker\,\psi = \{x \in G;\; \psi(x) = Hx = H\} = H$.

Proposição 5. Para todo homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G'$, $ker\,\psi \trianglelefteq G$.

Demonstração: Como $\psi(e) = e'$, $e \in ker\,\psi \neq \phi$. Se $a, b \in ker\,\psi$ então $\psi(ab^{-1}) = \psi(a).\psi(b)^{-1} = e'.e'^{-1} = e' \Longrightarrow ab^{-1} \in ker\,\psi$. Logo $ker\,\psi \leq G$. Agora, seja $a \in G$ e $b \in ker\,\psi$. Temos $\psi(a^{-1}ba) = \psi(a^{-1}).\psi(b).\psi(a) = \psi(a)^{-1}.e'.\psi(a) = \psi(a)^{-1}.\psi(a) = e' \Leftrightarrow a^{-1}ker\,\psi\; a = ker\,\psi$. Portanto $ker\,\psi \trianglelefteq G$.

Proposição 6. Seja $\psi : G \longrightarrow G'$. ψ é monomorfismo se, e somente se, $ker\,\psi = \{e\}$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Trivial, pois $\psi(e) = e'$ e ψ é injetiva $\Longrightarrow ker\,\psi = \{e\}$.

($\Longleftarrow$) Se $a, b \in G$ e $\psi(a) = \psi(b)$ então $\psi(a).\psi(b)^{-1} = e' \Longrightarrow \psi(ab^{-1}) = e' \Longrightarrow ab^{-1} \in ker\,\psi = \{e\} \Longrightarrow a = b$, ou seja, ψ é injetiva.

OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DOS HOMOMORFISMOS

Proposição 1. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos com núcleo N então existe um homomorfismo injetivo $\overline{\psi} : {}^{G}/_{N} \longrightarrow G'$ tal que $\overline{\psi}(Na) = \psi(a)\; \forall a \in G$.

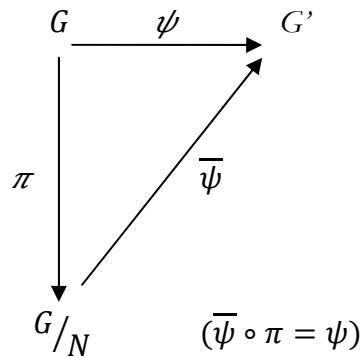
Demonstração: Inicialmente, notemos que se $a, b \in G$ são tais que $a \equiv b(modN)$ então $ab^{-1} \in N$ e $\psi(ab^{-1}) = e'$ donde temos que $\psi(a) = \psi(b)$. Isto significa que para $Na = Nb$,

$\overline{\psi}(Na) = \psi(a) = \psi(b) = \overline{\psi}(Nb)$ ou seja que $\overline{\psi}$ está, bem definida, ou seja a imagem de Ha não depende do seu representante. Dados $Ha, Hb \in G/_N$, temos $\overline{\psi}(Ha.Hb) = \overline{\psi}(Hab) = \psi(ab) = \psi(a).\psi(b) = \overline{\psi}(Ha).\overline{\psi}(Hb)$ logo, $\overline{\psi}$ é um homomorfismo de grupos. Agora, $Na \in ker\,\overline{\psi} \Leftrightarrow \overline{\psi}(Na) = \psi(a) = e' \Leftrightarrow a \in N \Leftrightarrow Na = N \Leftrightarrow ker\,\overline{\psi} = \{N\}$ ou seja $\overline{\psi}$ é injetiva.

Corolário (1º teorema do isomorfismo). Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um epimorfismo e $N = ker\,\psi$ tão$G/_N$ e G' são isomorfos. Ou melhor, existe um isomorfismo $\overline{\psi} : G/_N \longrightarrow G'$ tal que $\overline{\psi}(Ha) = \psi(a), \forall a \in G$.

Demonstração: $\overline{\psi}$ é o monomorfismo de $G/_N$ em G definida na proposição e como $Im\,\overline{\psi} = Im\,\psi = G'$, segue que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo ($G/_N \cong G'$).

Se $\pi : G \longrightarrow G/_N$ é a projeção canônica, este teorema pode ser expresso pela comutatividade do seguinte diagrama;

$(\overline{\psi} \circ \pi = \psi)$

Exemplo 1. Sejam $G = \mathbb{Z}$ (grupo aditivo) e $G' = \{1, i, -1, -i\}$ o grupo multiplicativo formado pelos números complexos ± 1 e $\pm i$ e a aplicação $\psi : G \longrightarrow G'$ dada por $\psi(a) = i^a$. É fácil ver que $\psi(a + b) = \psi(a).\psi(b)$ (faça isto como atividade). Agora,

$$ker\,\psi = \{a \in \mathbb{Z};\ \psi(a) = 1\} = \{a \in \mathbb{Z};\ i^a = 1\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\} = 4\mathbb{Z}.$$

Como ψ é sobrejetiva, do 1º teorema dos homomorfismos, temos que $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

Quando G é um grupo, $H, N \leq G$ e $N \trianglelefteq G$ então $HN \leq G$ e $H \cap N \trianglelefteq G$.

Com efeito, $e = ee \in HN \neq \phi$ e se $x = hn, y = h'n' \in HN$ então $xy^{-1} = hn(h'n')^{-1} = hn(n'^{-1}.h'^{-1})$. Sendo $N \trianglelefteq G$, $n'^{-1}.h'^{-1} \in Nh'^{-1} = h'^{-1}.N \subset HN$. Logo, $xy^{-1} \in HN$ donde temos que $HN \leq G$.

Sendo $N \trianglelefteq G$, segue que $N \trianglelefteq HN$ pois, $\forall a \in G, aN = Na$, em particular, $\forall a \in HN$, $aN = Na$. Também, $H \cap N \trianglelefteq H$. Aqui, dados $a \in H$ e $b \in H \cap N$, $a^{-1}b\ a \in a^{-1}Na = N$.

Como $a, b \in H$ segue que $a^{-1}b\ a\ \in H \cap N$. Logo, $a^{-1}\ (H \cap N)\ \ a \subset H \cap N$. Analogamente $H \cap N \subset a^{-1}(H \cap N)a, \forall a \in H$. Portanto $H \cap N \trianglelefteq H$.

Proposição 2. (2º teorema dos homomorfismos). Se $H, N \leq G$ e $N \trianglelefteq G$ então $\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{H \cap N}$.

Demonstração: Seja $\psi : H \longrightarrow \frac{HN}{N}$ definida por $\psi(h) = hN$. Então, $\psi(h.h') = (h.h')N = hN.h'N = \psi(h).\psi(h')$, é homomorfismo de grupos (notemos que aqui $hN = Nh$ pois $N \trianglelefteq HN$). Para qualquer classe $aN \in \frac{HN}{N}$, temos $a \in HN$ donde $a = hn$ com $h \in H$ e $n \in N$. Isto implica que $\psi(a) = aN = (hn)N = h(nN) = hN = \psi(h)$ logo, ψ é sobrejetivo. Além disto, $h \in ker\,\psi\ \Leftrightarrow hN = N \Leftrightarrow h \in N$. Ou seja, $ker\,\psi = H \cap N$. Como conseqüência do primeiro teorema segue que $\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{HN}{N}$, como queríamos demonstrar.

Observação. Se $H \cap N = \{e\}$, segue deste teorema que $\frac{HN}{N} \cong H$.

No estudo de grupos quocientes formados a partir de grupos quocientes, é útil a seguinte

Proposição 3. (3º Teorema dos homomorfismos). Se $K, H \trianglelefteq G$ e $K \subset H$ então $K \trianglelefteq H$, ${}^{H}/_{K} \trianglelefteq {}^{G}/_{K}$ e vale:

$$\frac{{}^{G}/_{H}}{{}^{H}/_{K}} \cong \frac{G}{H}$$

Demonstração: É claro que $K \trianglelefteq N$. Agora, notemos que se $Ka = Kb$ temos $ab^{-1} \in K$ e como $K \subset H$ segue que $ab^{-1} \in H$ e $Ha = Hb$. Portanto, podemos definir a aplicação$\psi : {}^{G}/_{K} \longrightarrow {}^{G}/_{H}$, pondo $\psi(Ka) = Ha$.

Notemos ainda que $\forall a, b \in G$, $\psi(KaKb) = \psi(Kab) = Hab = Ha.Hb = \psi(Ka).\psi(Kb)$. Além disto, para cada $Ha \in {}^{G}/_{H}$, existe $Ka \in {}^{G}/_{K}$ tal que $\psi(ka) = Ha$, ou seja, ψ é um homomorfismo sobrejetivo de ${}^{G}/_{K}$ em${}^{G}/_{H}$.

Finalmente, $ker\,\psi = \{Ka; Ha = H\} = \{Ka; a \in H\} = {}^{H}/_{K}$.

Segue do 1º teorema dos homomorfismos que $\frac{{}^{G}/_{K}}{{}^{H}/_{K}} \cong \frac{G}{H}$.

Observação. Este teorema deixa claro que quocientes de quocientes de G são na realidade isomorfos a quocientes de G. Vamos terminar esta aula estabelecendo o teorema da correspondência no qual veremos que um epimorfismo de grupos preserva propriedades como ser subgrupos ou ser subgrupo normal tanto diretamente quanto inversamente. Mais precisamente, vale a

Proposição 4. (Teorema da correspondência). Sejam G e G' grupos e $\psi : G \longrightarrow G'$ um epimorfismo onde $N = ker\ \psi$. Então:

a)Para cada $H, H \leq G, \psi(H) \leq G'$. Se $H \trianglelefteq G$ então $\psi(H) \trianglelefteq G'$.

b)Para cada $H', H' \leq G'$, o único subgrupo X de G contendo N tal que $\psi(X) = H$ é $\psi^{-1}(H')$. Se $H' \trianglelefteq G$ então $\psi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Demonstração: a) Já sabemos que $\psi(H) \leq G'$; sejam $H \trianglelefteq G$ e $\psi(a)^{-1}.\psi(H).\psi(a) = \psi(a^{-1}).\psi(H).\psi(a) = \psi(a^{-1}Ha) = \psi(H)$ portanto, $\psi(H) \trianglelefteq G'$.

b) Como $\psi(N) = \{e\} \subset H'$, claramente $\phi \neq \psi^{-1}(H') \subset N$. Se $a, b \in \psi^{-1}(H')$ então $\psi(a), \psi(b) \in H'$. Isto implica que $\psi(a).\psi(b)^{-1} \in H' \Longrightarrow \psi(a, b^{-1}) \in H' \Longrightarrow ab^{-1} \in \psi^{-1}(H')$. Logo, $\psi^{-1}(H') \leq G$.

Para cada $a \in G$ temos:

$\psi(a^{-1}\psi^{-1}(H')a) = \psi(a)^{-1}.\psi\big(\psi^{-1}(H')\big).\psi(a) = \psi(a)^{-1}.H'.\psi(a) = H'$.
to,$a^{-1}\psi^{-1}(H')a \subset \psi^{-1}(H') \Longrightarrow a^{-1}(\psi^{-1}(H')a = \psi^{-1}(H')$. Donde segue que $\varphi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Finalmente, seja $H \leq G$ tal que $N \leq H$ e $\psi(H) = H'$. Assim, $\psi^{-1}\big(\psi(H)\big) = \psi^{-1}(H') \Longrightarrow H \subset \psi^{-1}(H')$. Se $a \in \psi^{-1}(H')$ então $\psi(a) \in H' = \psi(H) \Longrightarrow \exists h \in H$ tal que $\psi(ah^{-1}) = e \Longrightarrow ah^{-1} \in N \leq H \Longrightarrow a \in Hh = H$. Logo, $\psi^{-1}(H') \subset H$ e conseqüentemente $H = \psi^{-1}(H')$.

RESUMO

Nesta aula estabelecemos o conceito de homomorfismo de grupo onde inicialmente definimos, exemplificamos e apresentamos as propriedades imediatas. Terminamos a aula enunciando e demonstrando os 1º, 2º e 3º teoremas dos isomorfismos e o teorema da correspondência que são teoremas importantes na construção dos pré-requisitos de conteúdos futuros.

ATIVIDADES

1. Verifique em cada caso, se ψ é um homomorfismo de grupos.

a) $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\psi(a) = 2a$ onde aqui $\mathbb{Z}$ é o grupo aditivo.

b) $\psi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $\psi(x) = |x|$ onde $\mathbb{R}^*$ é o grupo multiplicativo dos reais não nulos.

c) $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $\psi(a) = 2^a$, onde $\mathbb{Z}$ é aditivo e $\mathbb{R}_+^*$, multiplicativo.

d) $\psi : G \longrightarrow G$ dada por $\psi(a) = b^{-1}ab$ onde b é um elemento de G pré-fixado.

2. Seja G um grupo abeliano finito de ordem m e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $mdc(m, n) = 1$. Prove que a aplicação $\psi : G \longrightarrow G$ dada por $\psi(a) = a^n$ é um automorfismo de G.

3. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um isomorfismo, provar que $\psi^{-1} : G' \longrightarrow G$ também o é.

4. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo onde G é finito, prove que $|\psi(G)|$ divide $|G|$.

5. Se G é cíclico de ordem n provar que $G \cong \mathbb{Z}_n$.

6. Sejam G um grupo e $K, H \trianglelefteq G$ tais que $K \cap H = \{e\}$. Prove que $kh = hk \quad \forall k \in K$ e $\forall h \in H$.

7. Se $H, K \trianglelefteq G$, $G = HK$ e $H \cap K = \{e\}$, prove que G ≅ H X K.

COMENTÁRIO DAS ATIVIDADES

Na primeira atividade, se você entendeu a definição de homomorfismo, não deve ter tido problemas.

Na segunda, você deve ter notado que $a \in ker\,\psi \Leftrightarrow a^n = e \Longrightarrow \mathcal{O}(a)|n$. Como $\mathcal{O}(a)|m$ segue que $\mathcal{O}(a)|1$ ou seja $\mathcal{O}(a) = 1$ e $a = e$. Portanto, ψ é injetiva.

Na terceira atividade, você deve ter usado a definição de isomorfismo e concluído com facilidade.

Na quarta atividade, você deve ter usado o primeiro teorema do isomorfismo.

Na quinta atividade, para $G =< a >$, a aplicação $\psi : (\mathbb{Z}_n, +) \longrightarrow (G, \cdot)$ dada por $\psi(\overline{m}) = a^m$ deve ser um isomorfismo de grupos!

A sexta atividade, caro aluno, é um exercício que auxilia no desenvolvimento da sétima atividade. Para $h \in H$ e $k \in K$, você deve ter notado que $k^{-1}h^{-1}kh = (k^{-1}h^{-1}k).h = k^{-1}(h^{-1}kh) \in K \cap H = \{e\}$ pois H e K são subgrupos normais.

Na sétima atividade, se você conseguiu resolvê-la, deve ter percebido que a aplicação $\psi : H \times K \longrightarrow G$ onde $\psi(h, k) = hk$ é um isomorfismo de grupos.

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 194 p. (Projeto Euclides) ISBN.

HUNGERFORD, Thomas W. Abstract algebra: an introduction. 2nd. ed. Austrália: Thomson Learning, ©1997.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. Elementos de algebra. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 326 p. (Série: Projeto Euclides).